Problemas propuestos

17. Representar cada uno de los intervalos siguientes:

(*a*) $-5 < x < 0$ (*c*) $-2 \leqslant x < 3$ (*e*) $|x| < 3$ (*g*) $|x-2| < \frac{1}{2}$ (*i*) $0 < |x-2| < 1$ (*k*) $|x-2| \geqslant 1$
(*b*) $x \leqslant 0$ (*d*) $x \geqslant 1$ (*f*) $|x| \geqslant 5$ (*h*) $|x+3| > 1$ (*j*) $0 < |x+3| < \frac{1}{4}$

18. Si $f(x) = x^2 - 4x + 6$, hallar (*a*) $f(0)$, (*b*) $f(3)$, (*c*) $f(-2)$. *Sol.* (*a*) 6, (*b*) 3, (*c*) 18
Probar que $f(\frac{1}{2}) = f(7/2)$ y $f(2-h) = f(2+h)$.

19. Si $f(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$, hallar (*a*) $f(0)$, (*b*) $f(1)$, (*c*) $f(-2)$. *Sol.* (*a*) -1, (*b*) 0, (*c*) 3

Probar que $f(1/x) = -f(x)$ y $f(-1/x) = -1/f(x)$.

20. Si $f(x) = x^2 - x$, demostrar que $f(x+1) = f(-x)$.

21. Si $f(x) = 1/x$, demostrar que $f(a) - f(b) = f\left(\dfrac{ab}{b-a}\right)$.

22. Si $y = f(x) = (5x+3)/(4x-5)$, demostrar que $x = f(y)$.

23. Determinar el dominio de definición de cada una de las funciones siguientes:

(*a*) $y = x^2 + 4$ (*c*) $y = \sqrt{x^2 - 4}$ (*e*) $y = \dfrac{2x}{(x-2)(x+1)}$ (*g*) $y = \dfrac{x^2-1}{x^2+1}$

(*b*) $y = \sqrt{x^2+4}$ (*d*) $y = \dfrac{x}{x+3}$ (*f*) $y = \dfrac{1}{\sqrt{9-x^2}}$ (*h*) $y = \sqrt{\dfrac{x}{2-x}}$.

Sol. (*a*), (*b*), (*g*) todos los valores de x; (*c*) $|x| \geqslant 2$; (*d*) $x \neq -3$; (*e*) $x \neq -1, 2$; (*f*) $-3 < x < 3$; (*h*) $0 \leqslant x < 2$

24. Hallar $\dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$, siendo: (*a*) $f(x) = \dfrac{1}{x-2}$ para $a \neq 2$, $a + h \neq 2$; (*b*) $f(x) = \sqrt{x-4}$ para $a \geqslant 4$, $a + h \geqslant 4$; (*c*) $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$ para $a \neq -1$, $a + h \neq -1$.

Sol. (*a*) $\dfrac{-1}{(a-2)(a+h-2)}$, (*b*) $\dfrac{1}{\sqrt{a+h-4} + \sqrt{a-4}}$, (*c*) $\dfrac{1}{(a+1)(a+h+1)}$

25. Escribir los cinco primeros términos de cada una de las sucesiones.

(*a*) $\left\{1 + \dfrac{1}{n}\right\}$ (*c*) $\{a + (n-1)d\}$ (*e*) $\left\{\dfrac{n}{\sqrt{1+n^2}}\right\}$ (*g*) $\left\{(-1)^{n+1}\dfrac{n!}{n^n}\right\}$

(*b*) $\left\{\dfrac{1}{n(n+1)}\right\}$ (*d*) $\{(-1)^{n+1} ar^{n-1}\}$ (*f*) $\left\{\dfrac{\sqrt{n+1}}{n}\right\}$ (*h*) $\left\{\dfrac{(2n)!}{3^n 5^{n-1}}\right\}$

Sol. (*a*) 2, 3/2, 4/3, 5/4, 6/5
(*b*) 1/2, 1/6, 1/12, 1/20, 1/30
(*c*) a, $a+d$, $a+2d$, $a+3d$, $a+4d$
(*d*) a, $-ar$, ar^2, $-ar^3$, ar^4
(*e*) $1/\sqrt{2}$, $2/\sqrt{5}$, $3/\sqrt{10}$, $4/\sqrt{17}$, $5/\sqrt{26}$
(*f*) $\sqrt{2}$, $\frac{1}{2}\sqrt{3}$, $2/3$, $\frac{1}{4}\sqrt{5}$, $\sqrt{6}/5$
(*g*) 1, $-1/2$, 2/9, $-3/32$, 24/625
(*h*) $\dfrac{2}{3}$, $\dfrac{2^3}{3 \cdot 5}$, $\dfrac{2^4}{3 \cdot 5}$, $\dfrac{7 \cdot 2^7}{3^2 \cdot 5^2}$, $\dfrac{7 \cdot 2^8}{3 \cdot 5^2}$

26. Escribir el término general de cada una de las sucesiones.

(*a*) 1/2, 2/3, 3/4, 4/5, 5/6, . . .
(*b*) 1/2, $-1/6$, 1/12, $-1/20$, 1/30, . . .
(*c*) 1/2, 1/12, 1/30, 1/56, 1/90, . . .
(*d*) $1/5^3$, $3/5^5$, $5/5^7$, $7/5^9$, $9/5^{11}$, . . .
(*e*) $1/2!$, $-1/4!$, $1/6!$, $-1/8!$, $1/10!$, . . .

Sol. (*a*) $\dfrac{n}{n+1}$, (*b*) $(-1)^{n-1}\dfrac{1}{n^2+n}$, (*c*) $\dfrac{1}{(2n-1)2n}$, (*d*) $\dfrac{2n-1}{5^{2n+1}}$, (*e*) $(-1)^{n-1}\dfrac{1}{(2n)!}$

27. «Siempre que $|x-4| < 1$, $|f(x)| > 1$» significa: «siempre que x esté comprendido entre 3 y 5, $f(x)$ es menor que -1, o bien mayor que $+1$». Interpretar las siguientes expresiones:

(*a*) Siempre que $|x-1| < 2$, $f(x) < 10$.
(*b*) Siempre que $|x-5| < 2$, $f(x) > 0$.
(*c*) Siempre que $0 < |x-6| < 1$, $f(x) > 0$.
(*d*) Siempre que $|x-3| < 2$, $|f(x) - 9| < 4$.

28. Dibujar la función $y = f(x) = 6x - x^2$ y determinar cuál de las expresiones (*a*) — (*d*) del Problema 27 son verdaderas o falsas. *Sol.* (*b*) es falsa.

29. Demostrar que, siendo a y b dos números cualesquiera: $|a \pm b| = |b \pm a|$; $|ab| = |a| \cdot |b|$; $|a/b| = |a| / |b|$, $b \neq 0$; $|a+b| \geq |a| - |b|$; $|a-b| \leq |a| + |b|$; $|a-b| \geq |a| - |b|$.